Procesamiento Estadístico de Señales - Parte b:

Estimación Espectral. Métodos no Paramétricos.

Gabriel Alzamendi

galzamendi@bioingenieria.edu.ar

Laboratorio de Señales y Dinámicas no Lineales
Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional de Entre Ríos
http://www.bioingenieria.edu.ar/grupos/ldnlys/

2010

Contenidos

1 Introducción

2 Modelos AR

Contenidos

1 Introducción

2 Modelos AR

Métodos paramétricos:

Ideas previas:

- Se parte de un modelo "simple" responsable de la generación de la señal.
- Se calculan los coeficientes del modelo a partir de los datos *observados*.
- La complejidad del modelo depende de la cantidad de coeficientes a calcular *(Estimación del Orden)*.

Ventajas:

- No requieren gran cantidad de datos.
- Eliminan la necesidad funciones de ventaneo.
- No se asume que la correlación sea cero para $|m| \geq N$.

Métodos paramétricos:

Ideas previas:

- Se parte de un modelo "simple" responsable de la generación de la señal.
- Se calculan los coeficientes del modelo a partir de los datos *observados*.
- La complejidad del modelo depende de la cantidad de coeficientes a calcular *(Estimación del Orden)*.

Ventajas:

- No requieren gran cantidad de datos.
- Eliminan la necesidad funciones de ventaneo.
- No se asume que la correlación sea cero para $|m| \geq N$.

Métodos paramétricos:

Ideas previas:

- Se parte de un modelo "simple" responsable de la generación de la señal.
- Se calculan los coeficientes del modelo a partir de los datos *observados*.
- La complejidad del modelo depende de la cantidad de coeficientes a calcular *(Estimación del Orden)*.

Ventajas:

- No requieren gran cantidad de datos.
- Eliminan la necesidad funciones de ventaneo.
- No se asume que la correlación sea cero para $|m| \geq N$.

Métodos paramétricos:

Consideraciones:

Modelamos una señal $x[n]$ como la salida de un sistema lineal representado por una función racional de la forma:

$$H(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}}$$

Ecuaciones en diferencias:

$$x[n] = -\sum_{k=1}^{p} a_k x[n-k] + \sum_{k=0}^{q} b_k w[n-k]$$

donde $w[n]$ es la secuencia de entrada al sistema y $x[n]$ la secuencia de salida.

Métodos paramétricos:

Consideraciones:

- Al estimar el espectro, la secuencia de entrada $w[n]$ no es conocida.
- Si $x[n]$ es un proceso aleatorio estacionario, entonces podemos considerar que $w[n]$ también es un proceso aleatorio estacionario.
- Con esta condición el espectro de densidad de potencia esta definido por:

$$\hat{S}_x = |H(e^{j\omega})|^2 \hat{S}_w$$

donde $\hat{S}_w$ es la densidad espectral de potencia de $w[n]$ y $H(e^{j\omega})$ es la respuesta en frecuencia del modelo.

Métodos paramétricos:

Consideraciones:

- Consideramos a $x[n]$ como la salida del sistema $H(z)$ al ser su entrada $w[n]$ ruido gaussiano blanco con media cero y varianza σ_w^2.
- En el caso de ruido gaussiano blanco: autocorrelación $r_{xx}[n] = \sigma_w^2 \delta[m]$ y densidad espectral de potencia $\hat{S_w} = \sigma_w^2$.
- La densidad espectral de la salida del filtro sera:

$$\hat{S_x} = |H(e^{j\omega})|^2 \hat{S_w} = \sigma_w^2 |H(e^{j\omega})|^2.$$

- En función de los coeficientes del sistema podemos generar diferentes modelos.

Convención:

Por convención se trabaja con $\sigma_w^2 = 1$ y se le agrega una ganancia al modelo para ajustar la varianza en la densidad espectral de la estimación.

Tipos de modelos:

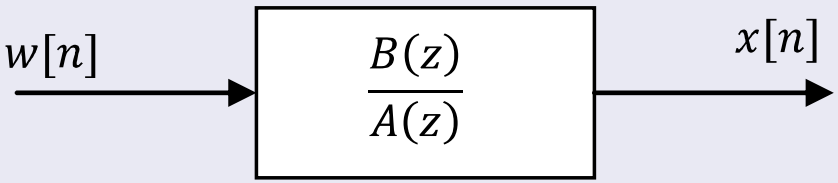
Modelos ARMA:

- Ecuaciones en diferencia:

$$x[n] = -\sum_{k=1}^{p} a_k x[n-k] + \sum_{k=0}^{q} b_k w[n-k]$$

- Estimación de la densidad espectral:

$$\hat{S}_x = \sigma_w^2 \left| \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k e^{-j\omega k}} \right|^2$$



Tipos de modelos:

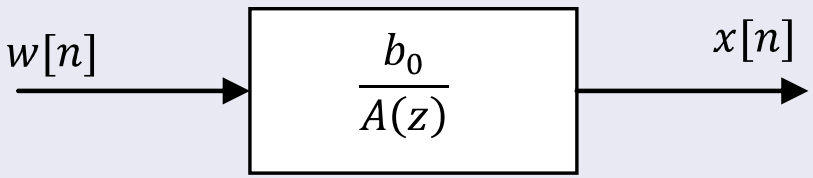
Modelos AR:

- Ecuaciones en diferencia:

$$x[n] = -\sum_{k=1}^{p} a_k x[n-k] + b_0 w[n]$$

- Estimación de la densidad espectral:

$$\hat{S}_x = \sigma_w^2 \left| \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k e^{-j\omega k}} \right|^2$$



Contenidos

1 Introducción

2 Modelos AR

Identificación del sistema:

Método de mínimos cuadrados:

- Se desea estimar una secuencia deseada $d[n]$ a partir de una secuencia relacionada $x[n]$ aplicando *"Filtros óptimos lineales invariantes a los desplazamientos"*.
- Obtenemos una estimación de $d[n]$ a partir de un filtro FIR de longitud P:

$$\hat{d}[n] = \sum_{k=0}^{P-1} h[k]x[n-k]$$

- El error de estimación será:

$$\epsilon[n] = d[n] - \hat{d}[n]$$

Identificación de sistemas:

Método de mínimos cuadrados:

- La suma del error cuadrático será:

$$S = \sum_{n=n_I}^{n_F} |\epsilon[n]|^2$$

  donde n_I y n_F son valores de donde se realizará la minimización.
- El criterio es minimizar los términos del error cuadrático *(Método de mínimos cuadrados)*.

Identificación del sistema:

Método de mínimos cuadrados:

- En forma matricial:

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{X}\mathbf{h}$$

donde:

$$\hat{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \hat{d}[n_I] \\ \hat{d}[n_{I+1}] \\ \vdots \\ \hat{d}[n_F] \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x[n_I-1] & x[n_I-2] & \dots & x[n_I-P] \\ x[n_I] & x[n_I-1] & \dots & x[n_I-P+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[n_F-1] & x[n_F-2] & \dots & x[n_F-P] \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[P-1] \end{bmatrix}$$

Identificación del sistema:

Método de mínimos cuadrados:

- Definiendo el vector de error en la estimación:

$$\epsilon = \mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}}$$

- El problema de minimización se convierte en:

$$S = \|\epsilon\|^2 = \epsilon^{*T}\epsilon$$

- Reemplazando:

$$\begin{aligned} S &= (\mathbf{d} - \mathbf{Xh})^{*\mathbf{T}}(\mathbf{d} - \mathbf{Xh}) \\ &= \mathbf{d}^{*\mathbf{T}}\mathbf{d} - \mathbf{h}^{*\mathbf{T}}\mathbf{X}^{*\mathbf{T}}\mathbf{d} - \mathbf{d}^{*\mathbf{T}}\mathbf{Xh} + \mathbf{h}^{*\mathbf{T}}\mathbf{X}^{*\mathbf{T}}\mathbf{Xh} \end{aligned}$$

Identificación del sistema:

Método de mínimos cuadrados:

- Tomando la derivada de S con respecto h^{*T} y haciéndola igual a cero:

$$\nabla_{h^{*T}} S = 0 \quad \rightarrow \quad (\mathbf{X^{*T}X})\mathbf{h} = \mathbf{X^{*T}d}$$

("ecuación de Wiener-Hopf para mínimos cuadrados")

- Trabajando algebraicamente:

$$\mathbf{h} = (\mathbf{X^{*T}X})^{-1}\mathbf{X^{*T}d} = \mathbf{X^{+}d}$$

donde X^{+} es la *"matriz pseudoinversa de Moore-Penrose"*.

- El error de estimación será:

$$S = \mathbf{d^{*T}d} - \mathbf{d^{*T}Xh}$$

Identificación del sistema:

Método de la Covarianza:

- La predicción lineal es un caso particular de los filtros óptimos donde $d[n] = x[n]$ y los datos observados son $x[n-1]x[n-2]\dots x[n-P]$.
- Estimación de $x[n]$ será:

$$\hat{x}[n] = -\mathrm{a}_1 x[n-1] - \mathrm{a}_2 x[n-2] - \cdots - \mathrm{a}_\mathrm{P} x[n-P] = -\sum_{k=1}^{P} \mathrm{a}_\mathrm{k} x[n-k]$$

- El error de estimación será:

$$\epsilon = x[n] - \hat{x}[n] = \sum_{k=0}^{P} \mathrm{a}_\mathrm{k} x[n-k]$$

donde $\mathrm{a}_0 = 1$.

Identificación del sistema:

Método de la Covarianza:

- Calculando $\hat{x}[n]$ desde $n = n_I$ hasta n_F y poniéndolo en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}[n_I] \\ \hat{x}[n_I+1] \\ \vdots \\ \hat{x}[n_F] \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x[n_I-1] & x[n_I-2] & \dots & x[n_I-P] \\ x[n_I] & x[n_I-1] & \dots & x[n_I-P+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[n_F-1] & x[n_F-2] & \dots & x[n_F-P] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 \\ \mathrm{a}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{a}_P \end{bmatrix}$$

- Definiendo el vector $\mathbf{x_i} = \begin{bmatrix} x[n_I-i] & x[n_I-i+1] & \cdots & x[n_F-i] \end{bmatrix}^T$ podemos escribir:

$$\hat{\mathbf{x_0}} = -\mathbf{X_1}\mathrm{a}; \text{ donde } \mathbf{X_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \cdots & \mathbf{x_P} \end{bmatrix}^T \text{ y } \mathrm{a}' = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 \\ \mathrm{a}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{a}_P \end{bmatrix}$$

Identificación del sistema:

Método de la Covarianza:

- Se ve que $\hat{\mathbf{x_0}} = -\mathbf{X_1}\mathrm{a}$ posee una estructura parecido al problema de encontrar el filtro óptimo.
- Podemos aplicar los resultados de las ecuaciones de *Wiener-Hopf*.
- Se obtiene el problema de mínimos cuadrados:

$$\mathbf{x_0} = -\mathbf{X_1}\mathrm{a}'$$

- La solución la podemos encontrar aplicando:

$$\mathrm{a}' = -\mathbf{X_1^+}\mathbf{x_i} = -(\mathbf{X_1^{*T}}\mathbf{X_1})^{-1}\mathbf{X_1^{*T}}\mathbf{x_i}$$

Identificación del sistema:

Método de la Covarianza:

- Podemos escribir el vector de error como:

$$\epsilon = \mathbf{x_0} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{0} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_0} & \mathbf{X_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathrm{a}' \end{bmatrix} = \mathbf{X}\mathrm{a}$$

- Por el teorema de *Ortogonalidad*:

$$\mathbf{X}^{*\mathbf{T}}\epsilon = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\mathbf{0}^{*\mathbf{T}} \\ \mathbf{X}_\mathbf{1}^{*\mathbf{T}} \end{bmatrix} \epsilon = \begin{bmatrix} S \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \rightarrow (\mathbf{X}^{*\mathbf{T}}\mathbf{X})\mathrm{a} = \begin{bmatrix} S \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

  denominada ecuación de *Yule-Walker*.

- La varianza del error de predicción es:

$$\sigma^2_{\epsilon_P} = \frac{1}{n_F - n_I + 1} S = |b_0|^2$$

Identificación del sistema:

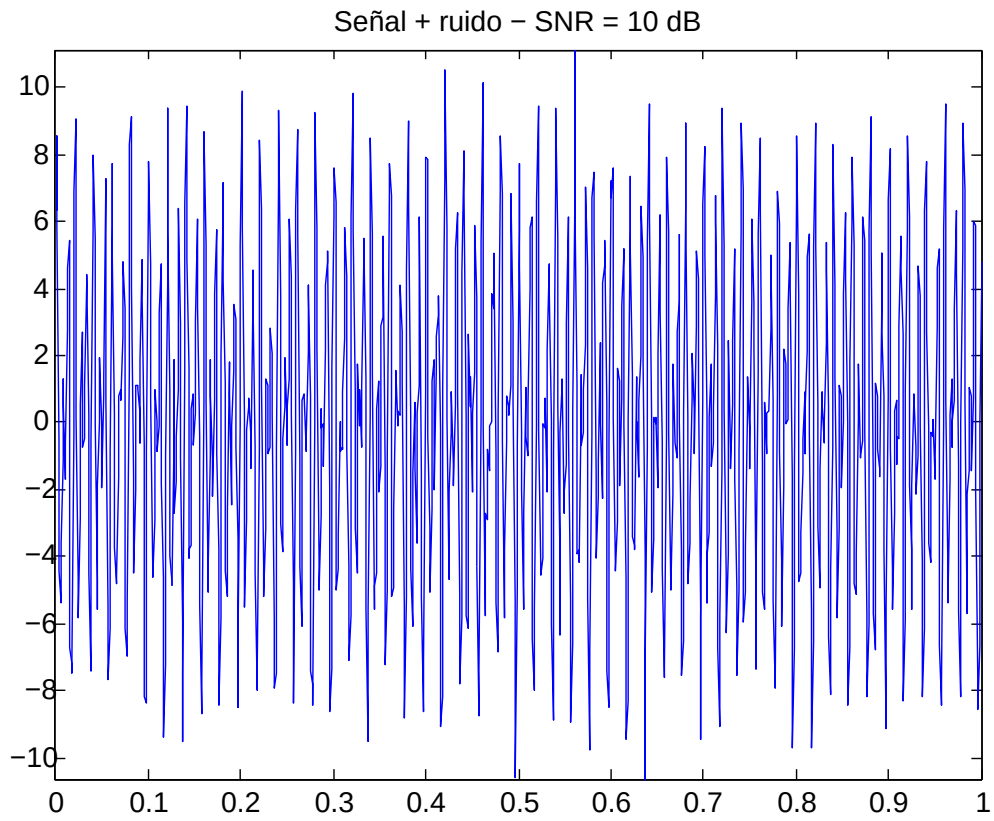
Método de la Covarianza:

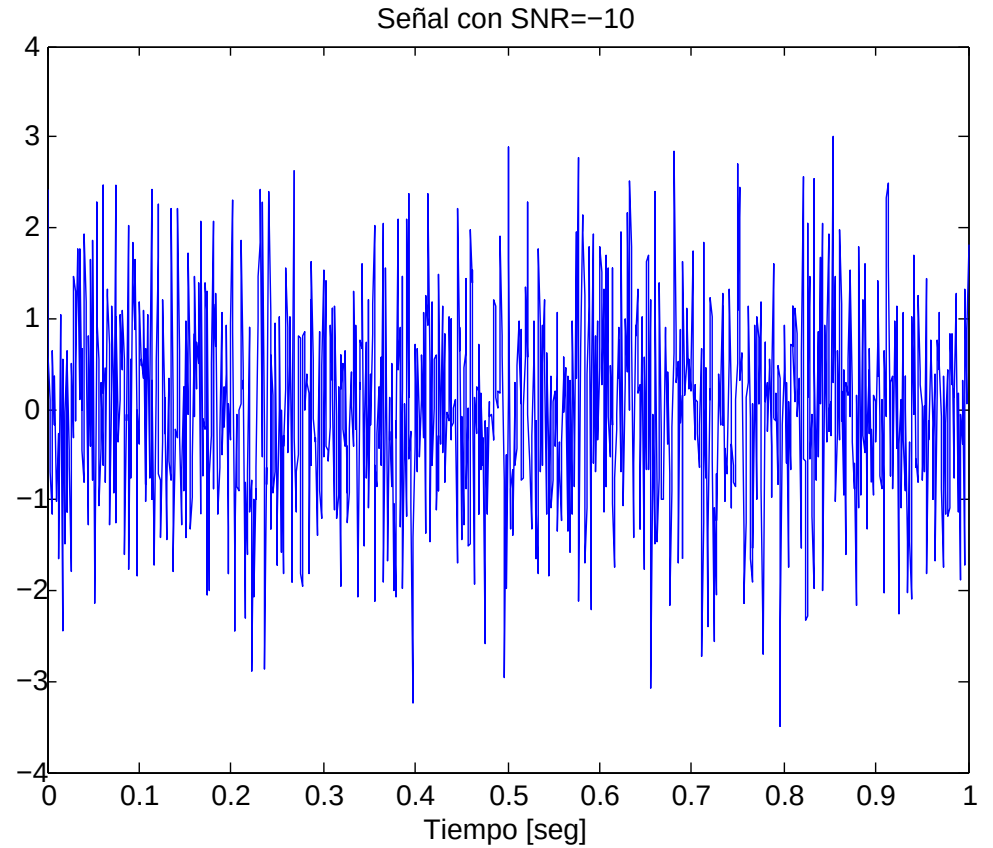
Dependiendo de la selección de n_I y de n_F se obtienen diferentes métodos:

- Covarianza: se define $n_I = P$ y $n_F = N_s$, donde N_s son la cantidad de datos y el primer elemento es $x[1]$. Por lo tanto:

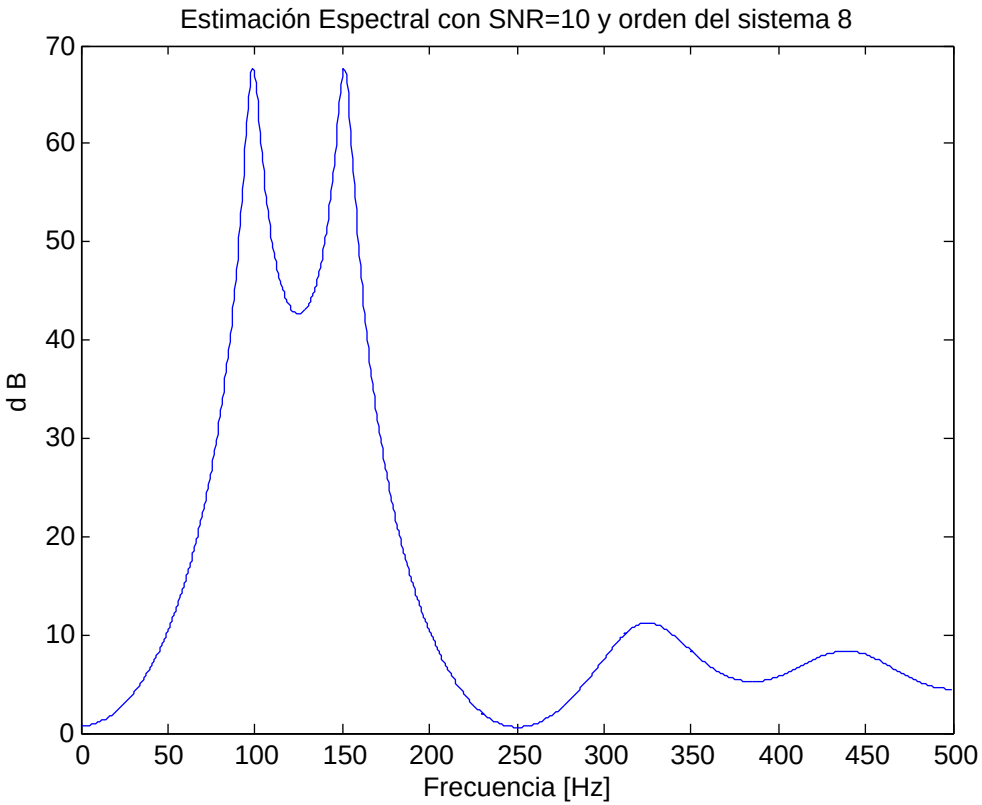
$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x[P] & x[P-1] & \cdots & x[1] \\ x[P+1] & x[P] & \cdots & x[2] \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ x[Ns-1] & x[Ns-2] & \cdots & x[Ns-P] \end{bmatrix}$$

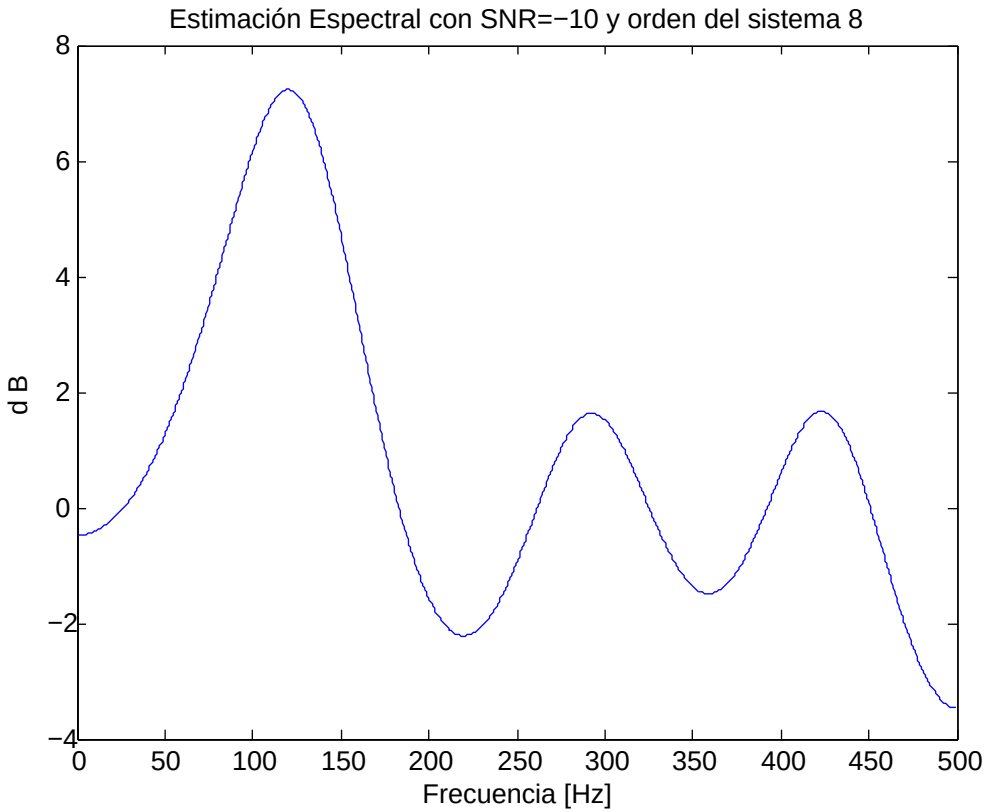
Identificación de sistemas:



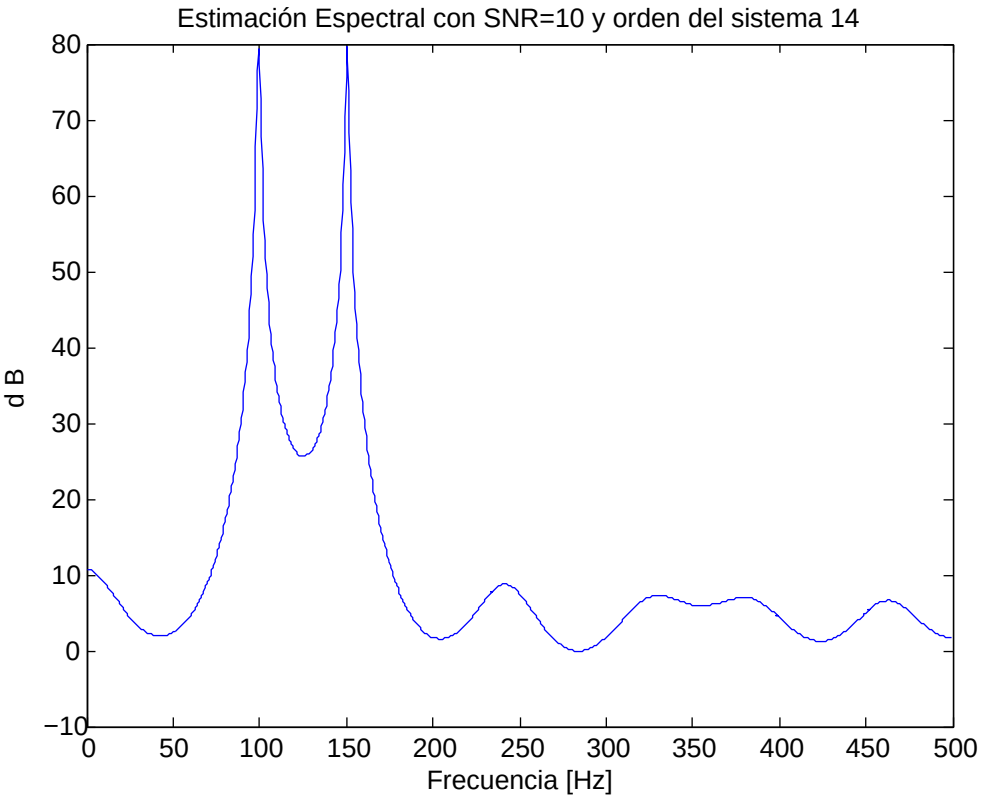


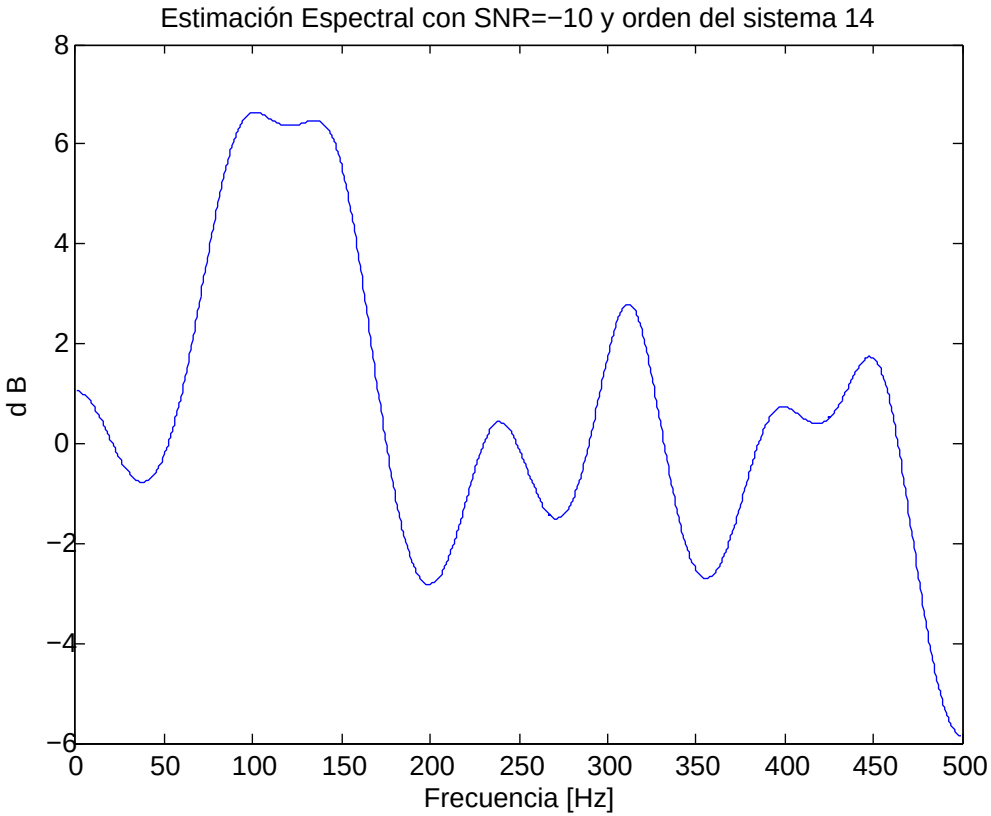
Identificación de sistemas:



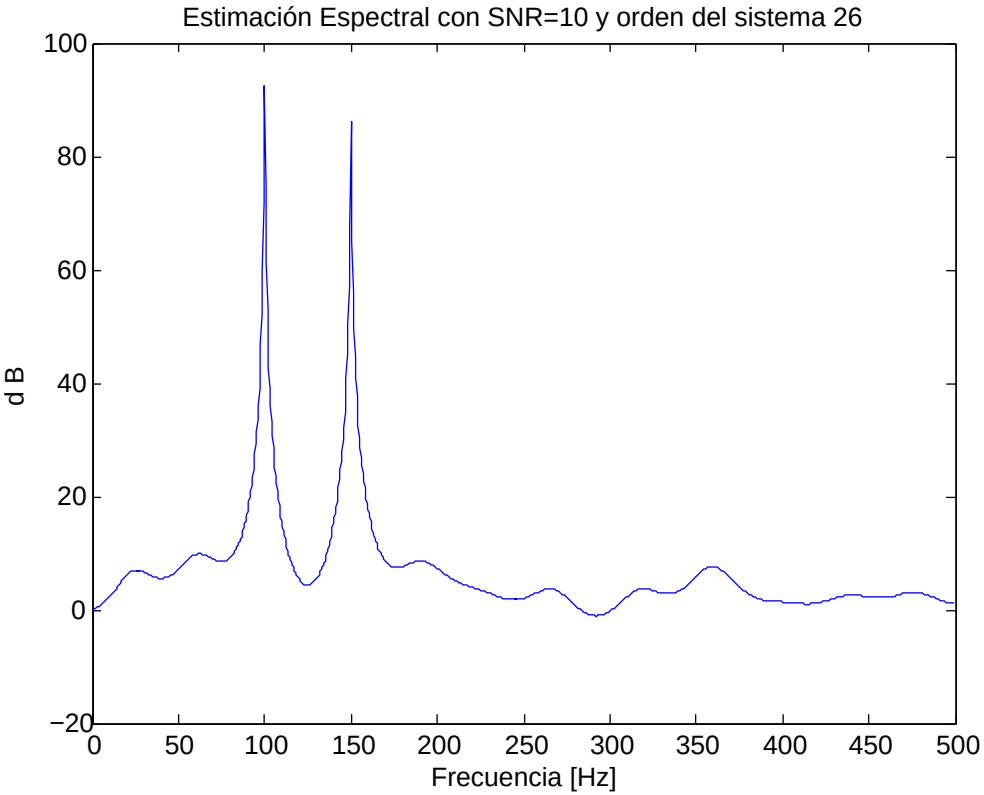


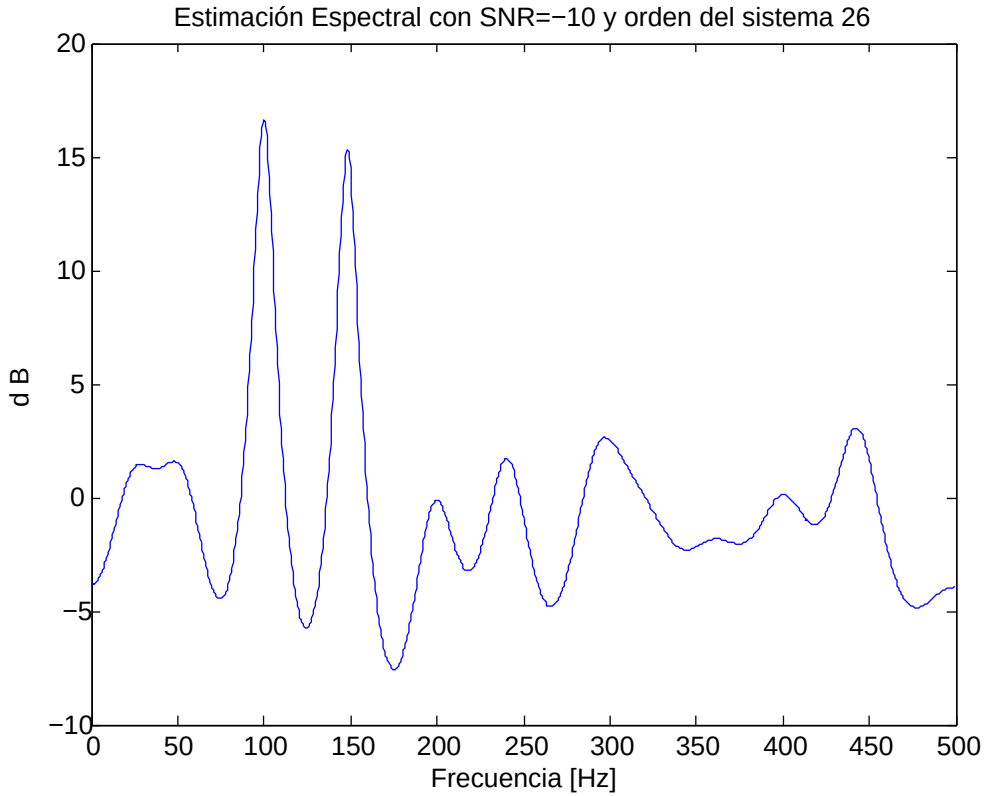
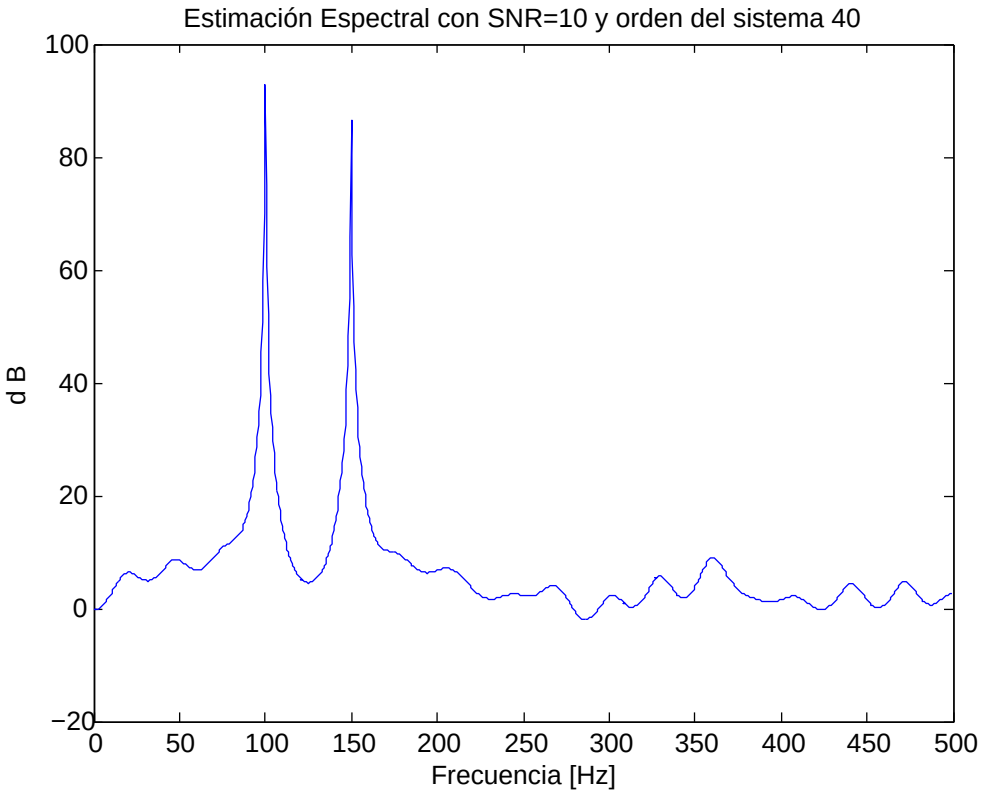
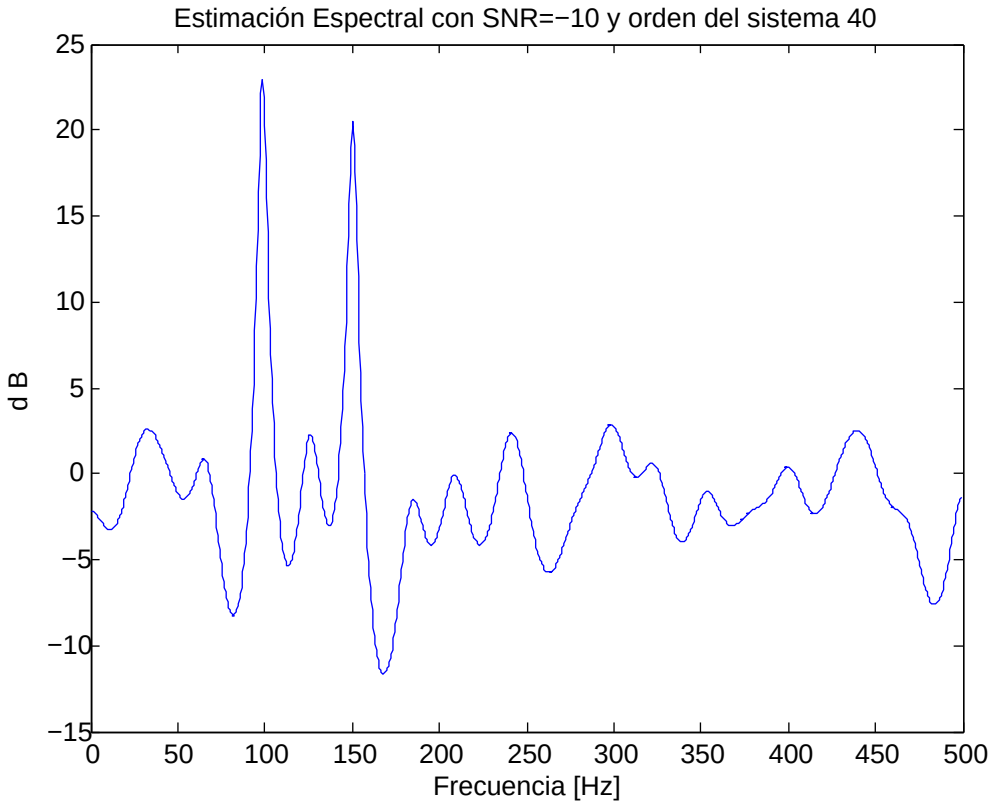
Identificación de sistemas:





Identificación de sistemas:





Identificación de sistemas: